ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

BÙI THỊ PHƯƠNG THẢO

KHAI TRIỂN THẬP PHÂN CỦA SỐ HỮU TỶ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

BÙI THỊ PHƯƠNG THẢO

KHAI TRIỂN THẬP PHÂN CỦA SỐ HỮU TỶ

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. NGUYỄN DUY TÂN

THÁI NGUYÊN - 2020

Mục lục

Mở đầu **1**
Chương 1. Kiến thức chuẩn bị **3**
1.1. Đồng dư và Định lý Euler 3
1.2. Cấp của số nguyên modulo n 4
1.3. Thặng dư toàn phương 6
Chương 2. Phân số tuần hoàn **11**
2.1. Phân số tuần hoàn 11
2.2. Chu kỳ của phân số tuần hoàn 17
Chương 3. Định lý Midy **22**
3.1. Định lý Midy 22
3.2. Tính chất 2-khối 24
3.3. Tính chất m-khối 30
Kết luận **37**
Tài liệu tham khảo **38**

Mở đầu

Xét khai triển thập phân của 1/7:

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}.$$

Ta nhận thấy rằng khai triển thập của 1/7 là thuần túy tuần hoàn, với chu kỳ là 6, với khối lặp lại là 142857. Nếu ta chia đôi khối lặp lại này thành 2 phần và cộng chúng lại ta sẽ nhận được một số gồm toàn số 9: $142 + 857 = 999$. Đây là một ví dụ minh họa cho một kết quả thú vị của Midy nói rằng giả sử khai triển thập phân của $1/p$, ở đây p là một số nguyên tố, có chu kỳ chẵn, khi đó nếu ta chia đều khối lặp lại thành 2 phần A và B thì $A + B$ là một số toàn số 9.

Mục tiêu của luận văn là tìm hiểu một số tính chất cơ bản, thú vị về khai triển thập phân của số hữu tỷ. Tìm hiểu về định lý Midy đề cập ở trên và một số mở rộng của nó.

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, bố cục của luận văn được chia làm ba chương.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày về đồng dư, định lý Euler, cấp của số nguyên modulo n.

Chương 2. Phân số tuần hoàn

Chương này trình bày một số tính chất và chu kỳ của phần số tuần hoàn

Chương 3. Định lý Midy

Chương này trình bày về Định lý Midy và một số hướng mở rộng.

Luận văn này được thực hiện và hoàn thành vào tháng 6 năm 2020 tại trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên. Qua đây, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS. TS Nguyễn Duy Tân, người đã tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình làm việc để hoàn thành luận văn này. Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện để giúp tác giả học tập và hoàn thành luận văn cũng như chương trình thạc sĩ. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học K12A7, khóa 2018 - 2020 đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn này. Đồng thời tác giả xin gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu và các đồng nghiệp tại trường THPT Lê Ích Mộc, Thủy Nguyên, Hải Phòng đã tạo điều kiện cho tác giả trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Người viết luận văn

Bùi Thị Phương Thảo

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số kiến thức về đồng dư, Định lý Euler, cấp của một số nguyên modulo n và thặng dư toàn phương. Tài liệu tham khảo cho chương này là [3], [4] và [7]. Một số tính toán trong luận văn này sử dụng công cụ trang worlframalpha.

1.1. Đồng dư và Định lý Euler

Cho n là một số nguyên dương.

Định nghĩa 1.1.1. Cho hai số nguyên a và b, ta nói a *đồng dư* với b modulo n, viết $a \equiv b \pmod{n}$ nếu $a - b$ chia hết cho n.

Quan hệ đồng dư có nhiều tính chất như quan hệ bằng nhau.
1. Với mọi số nguyên a, $a \equiv a \pmod{n}$.
2. Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ thì $b \equiv a \pmod{n}$.
3. Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ và $b \equiv c \pmod{n}$ thì $a \equiv c \pmod{n}$.
4. Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ và $c \equiv d \pmod{n}$ thì $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n}$ và $ac \equiv bd \pmod{n}$.

Định nghĩa 1.1.2 (Phi-hàm Euler)**.** Với số nguyên dương n, $\phi(n)$ là số các số nguyên dương a mà $1 \leq a \leq n$ và $\gcd(a, n) = 1$, tức là

$$\phi(n) = \#\{1 \leq a \leq n \mid \gcd(n) = 1\}.$$

Ví dụ 1.1.3. Dưới đây là một số giá trị của $\phi(n)$.
- $\phi(1) = \phi(2) = \#\{1\} = 1$.
- $\phi(3) = \#\{1, 2\} = 2$.

- $\phi(4) = \#\{1,3\} = 2$.
- $\phi(5) = \#\{1,2,3,4\} = 4$.
- $\phi(6) = \#\{1,5\} = 2$.
- $\phi(7) = \#\{1,2,3,4,5,6\} = 6$.
- $\phi(8) = \#\{1,3,5,7\} = 4$.
- $\phi(9) = \#\{1,2,4,5,7,8\} = 6$.
- $\phi(10) = \#\{1,3,7,9\} = 4$.

Định lý 1.1.4 (Định lý Euler)**.** *Cho n là một số nguyên dương và a là một số nguyên nguyên tố cùng nhau với n. Khi đó $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.*

Khi $n = p$ là số nguyên tố thì $\phi(p) = p - 1$ và ta thu được Định lý Fermat nhỏ.

Định lý 1.1.5 (Định lý Fermat nhỏ)**.** *Cho p là một số nguyên dương và a là một số nguyên nguyên tố cùng nhau với p. Khi đó $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Một số tính chất của phi-hàm Euler.

1. Nếu m và n là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

2. Nếu p là một số nguyên tố và r nguyên dương thì $\phi(p^r) = p^r - p^{r-1}$.

Từ hai tính chất trên, ta suy ra công thức của $\phi(n)$ như sau: Nếu $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ là phân tích ra lũy thừa nguyên tố của n thì

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Ví dụ: $\phi(100) = \phi(2^2 5^2) = 100\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 100 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{5} = 40$.

1.2. Cấp của số nguyên modulo n

Cho n là một số nguyên dương > 1. Theo Định lý Euler, với mọi số nguyên a nguyên tố cùng nhau với n, ta có $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Như vậy, tồn tại ít nhất một số nguyên dương k sao cho $a^k \equiv 1 \pmod{n}$.

Định nghĩa 1.2.1. Cho a là một số nguyên nguyên tố cùng nhau với n. Ta gọi *cấp của a modulo n*, viết $\mathrm{ord}_n(a)$ là số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho $a^k \equiv 1 \pmod{n}$.

Trong chương sau ta sẽ thấy chu kỳ của khai triển thập phân của phân số $1/n$ (với n nguyên tố cùng nhau với 10) bằng $\mathrm{ord}_n(10)$. Do vậy, trong các ví dụ trong chương này, ta chỉ trình bày tính toán với $\mathrm{ord}_n(10)$.

Ví dụ 1.2.2. Ta tìm $\text{ord}_7(10)$. Ta có

$$10^1 \equiv 3 \pmod 7, 10^2 \equiv 2 \pmod 7, 10^3 \equiv 6 \pmod 7,$$
$$10^4 \equiv 4 \pmod 7, 10^5 \equiv 5 \pmod 7, 10^6 \equiv 1 \pmod 7.$$

Vậy $\text{ord}_7(10) = 6$.

Ví dụ 1.2.3. (i) Ta tìm tất cả số số nguyên dương n sao cho $\text{ord}_n(10) = 1$. Ta có $10^1 \equiv 1 \pmod n$. Do vậy $n \mid 9$, như vậy $n = 3$ hoặc 9. Thử lại ta thấy $\text{ord}_3(10) = \text{ord}_9(10) = 1$.

(ii) Ta tìm tất cả số số nguyên dương n sao cho $\text{ord}_n(10) = 2$. Ta có $10^2 \equiv 1 \pmod n$. Do vậy $n \mid 99$. Kết hợp phần (i), ta suy ra $n = 11, 33$ hoặc 99. Thử lại ta thấy $\text{ord}_{11}(10) = \text{ord}_{33}(10) = \text{ord}_{99}(10) = 2$.

Mệnh đề 1.2.4. *Cho a và n là hai số nguyên nguyên tố cùng nhau với $n > 0$. Khi đó số nguyên x thõa mãn $a^x \equiv 1 \pmod n$ nếu và chỉ nếu $\text{ord}_n(a) \mid x$.*

Chứng minh. Đặt $k = \text{ord}_n(a)$. Giả sử $k \mid x$. Khi đó $x = mk$ với m nguyên dương nào đó. Ta có

$$a^x = (a^k)^m \equiv 1^m = 1 \pmod n.$$

Đối với chiều ngược lại, ta giả sử $a^x \equiv 1 \pmod n$. Ta chia x cho k, ta được $x = q \cdot k + r$, ở đây $0 \le r < k$. Ta có

$$1 \equiv a^x = a^{q \cdot k + r} = (a^k)^q a^r \equiv a^r \pmod n.$$

Do vậy $a^r \equiv 1 \pmod n$. Vì $0 \le r < k$ nên $r = 0$ vì theo định nghĩa $k = \text{ord}_n(a)$ là số nguyên dương y nhỏ nhất sao cho $a^y \equiv 1 \pmod n$. Như vậy $x = q \cdot k$ và $k \mid x$. □

Kết hợp với Định lý Euler ta có ngay hệ quả sau.

Hệ quả 1.2.5. *Cho a và n là hai số nguyên nguyên tố cùng nhau với $n > 0$. Khi đó $\text{ord}_n(a) \mid \phi(n)$.*

Nói riêng, nếu $n = p$ nguyên tố thì $\text{ord}_p(a) \mid p - 1$.

Sử dụng hệ quả trên ta có thể tính cấp của số nguyên modulo n khá nhanh chóng.

Ví dụ 1.2.6. (1) Ta tính lại $k = \text{ord}_7(10)$. Ta có $\phi(7) = 6$, nên k phải là ước của 6. Do vậy $k = 1, 2, 3$ hoặc 6. Ta có

$$10^1 \equiv 3 \pmod 7, 10^2 \equiv 2 \pmod 7, 10^3 \equiv 6 \pmod 7.$$

Do vậy $k = 6$.

(2) Ta tính $k = \text{ord}_{13}(10)$. Ta có $\phi(13) = 12$, nên k phải là ước của 12. Do vậy $k = 1, 2, 3, 4, 6$ hoặc 12. Ta có

$$10^1 \equiv -3 \pmod{13}, 10^2 \equiv -4 \pmod{13}, 10^3 \equiv -1 \pmod{13},$$
$$10^4 \equiv 3 \pmod{13}, 10^6 \equiv 1 \pmod{13}.$$

Do vậy $k = 6$.

(3) Ta tính $k = \text{ord}_{21}(10)$. Ta có $\phi(21) = \phi(3)\phi(7) = 2 \cdot 6 = 12$, nên k phải là ước của 12 Do vậy $k = 1, 2, 3, 4, 6$ hoặc 12. Ta có

$$10^1 \equiv 10 \pmod{21}, 10^2 \equiv 16 \pmod{21}, 10^3 \equiv 13 \pmod{21},$$
$$10^4 \equiv 4 \pmod{21}, 10^6 \equiv 1 \pmod{21}.$$

Do đó $k = 6$.

Hệ quả 1.2.7. *Cho $n > 1$ là số nguyên dương với* $\gcd(n, 10) = 1$. *Nếu tồn tại số nguyên dương v sao cho $n \mid 10^v + 1$ thì* $\text{ord}_n(10)$ *là chẵn.*

Chứng minh. Ta có $10^v \equiv -1 \pmod{n}$ và do vậy $10^{2v} \equiv 1 \pmod{n}$. Theo Mệnh đề 1.2.4, $\text{ord}_n(10) \mid 2v$. Giả sử $\text{ord}_n(10)$ lẻ. Khi đó $\text{ord}_n(10) \mid v$. Do vậy $10^v \equiv 1 \pmod{n}$ (lại theo Mệnh đề 1.2.4). Ta suy ra $-1 \equiv 10^v \equiv 1 \pmod{n}$ và $2 \equiv 0 \pmod{n}$. Điều này là vô lý vì $n \neq 2$. □

Chú ý 1.2.8. (1) Nói chung trong hệ quả ở trên ta không có khẳng định theo chiều ngược lại. Ví dụ, với $n = 21$ thì $\text{ord}_{21}(10) = 6$ chẵn, nhưng $21 \nmid 10^v + 1$ với mọi số nguyên dương v. Thật vậy, giả sử tồn tại v nguyên dương sao $21 \mid 10^v + 1$. Nói riêng $10^v + 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Nhưng rõ ràng $10^v + 1 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod{3}$, ta có điều mâu thuẫn.

(2) Tuy nhiên, khi n là nguyên tố thì trong hệ quả trên ta có khẳng định theo chiều ngược lại. Cụ thể hơn, nếu $n = p$ là số nguyên tố khác 2 và 5, và $\text{ord}_p(10) = 2r$ là chẵn, thì $p \mid 10^r + 1$. Thật vậy, ta có $10^{2r} \equiv 1 \pmod{p}$. Do vậy $p \mid 10^{2r} - 1 = (10^r - 1)(10^r + 1)$. Vì p nguyên tố, nên p là ước của $10^r - 1$ hoặc của $10^r + 1$. Vì $2r$ là cấp của 10 modulo p và $2r > r$ nên $10^r \not\equiv 1 \pmod{p}$, tức là $p \nmid 10^r - 1$. Ta suy ra $p \mid 10^r + 1$.

1.3. Thặng dư toàn phương

Định nghĩa 1.3.1. Cho p là một số nguyên tố và a là một số nguyên sao cho $p \nmid a$. Số a được gọi là một *thặng dư toàn phương modulo p* nếu tồn tại một số nguyên x sao cho

$a \equiv x^2 \pmod{p}$. Nếu không tồn tại một số nguyên x nào sao cho $a \equiv x^2 \pmod{p}$ thì ta nói a là *phi thặng dư toàn phương modulo p*.

Ví dụ. Các số $1, 2, 4$ là các thặng dư toàn phương modulo 7, trong khi đó 3,5 và 6 là không thặng dư toàn phương modulo 7.

Định nghĩa 1.3.2 (Ký hiệu Legendre)**.** Cho p là một số nguyên tố lẻ không chia hết số nguyên a. Ta định nghĩa:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{nếu a là thặng dư toàn phương modulo p} \\ -1 & \text{nếu a không là thặng dư toàn phương modulo p} \end{cases}.$$

Ký hiệu này được gọi là ký hiệu Legendre.

Một số tính chất

Cho p là số nguyên tố lẻ không chia hết các số nguyên a và b. Khi đó ta có các tính chất sau.

1. $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$.
2. $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.
3. $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$ (Tiêu chuẩn Euler).
4. Nếu $a \equiv b \pmod{p}$ thì $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.
5. $\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } p \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{nếu } p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$.
6. $\left(\frac{2}{p}\right) \begin{cases} 1 & \text{nếu } p \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ -1 & \text{nếu } p \equiv \pm 3 \pmod 8 \end{cases}$.

Định lý 1.3.3 (Luật thuận nghịch toàn phương Gauss)**.** *Giả sử p và q là các số nguyên tố lẻ phân biệt. Khi đó nếu $p \equiv 1 \pmod 4$ hoặc $q \equiv 1 \pmod 4$ thì $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$; và nếu $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$ thì $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$.*

Hệ quả 1.3.4. *Cho p là một số nguyên tố khác 5. Khi đó*

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \textit{nếu } p \equiv \pm 1 \pmod 5 \\ -1 & \textit{nếu } p \equiv \pm 2 \pmod 5 \end{cases}$$